Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
Деснянский В.Н. Деснянский
«_15_» _февраля_ 2022 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-10 классы

Вариант 1

Задание 1.

Как с помощью только двух ведер емкостью 7 и 15 литров набрать из реки ровно 4 литра воды.

Задание 2.

Решить неравенство:

$$\frac{x\sqrt{5}+1}{1-\sqrt{x^2-2x+2}} \leq 1.$$

Задание 3.

Решить уравнение:

$$\cos^2 2x + \cos^2 x = 1 + ctg3x.$$

Задание 4.

Решить в целых числах уравнение:

$$x^2 - y^2 - 4y = 9.$$

Задание 5.

В банк кладется 1000 рублей на 10 лет. В каком случае вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% один раз в год, или если он начисляет $\frac{5}{12}$% один раз в месяц.

Ответ должен быть обоснован.

Задание 6.

Один катет прямоугольного треугольника равен 6, медиана, опущенная на этот катет равна $\sqrt{22}$. Найдите гипотенузу этого треугольника.

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
_______________ В.Н. Деснянский
«15» февраля 2022 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-10 классы

Вариант 2

Задание 1.

Как с помощью только двух ведер емкостью 5 и 7 литров набрать из реки ровно 1 литр воды.

Задание 2.

Решите неравенство:

$$\frac{3x+3}{3-\sqrt{x^2-2x+10}} \leq 1.$$

Задание 3.

Решить уравнение:

$$sin^2 2x + sin^2 x = 1 + ctg3x.$$

Задание 4.

Решить в целых числах уравнение:

$$4x^2 = y^2 + 2y + 4.$$

Задание 5.

В банк кладется 1000 рублей на 5 лет. В каком случае вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 3% один раз в год, или если он начисляет $\frac{1}{4}$% один раз в месяц.

Ответ должен быть обоснован.

Задание 6.

Чему равен острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника?

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
_____________ В.Н. Деснянский
«15» февраля 2022 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Краткие решения к задачам очного тура
9-10 классы

Вариант 1

Задание 1.

Наливаем в большое ведро ровно 15 литров, а затем из этого ведра заполняем маленькое ведро в 7 литров. В большом ведре останется 8 литров. Выливаем воду из маленького ведра и заполняем это пустое ведро водой из большого. Тогда в первом (маленьком) будет 7 литров, а во втором остается 1 литр. Этот литр воды мы перельем в первое ведро, из которого вылили всю воду. Таким образом, в первом ведре 1 л, во втором 0 – воды. Заполняем это ведро полностью водой. Значит в первом – 1 л, во втором 15 л. Из второго доливаем первое водой до полного объема. В первом теперь 7 л, во втором 9. Далее освобождаем первое ведро от воды и заливаем его водой из второго ведра. Получаем в первом ведре 7 л, во втором – 2 л. Освобождаем первое ведро от воды и наливаем его водой из второго. Тогда в первом ведре 7 л, во втором 2 л. Выливаем воду из первого ведра и наливаем водой 2 л из второго. Следовательно, в первом 2 л, во втором 0. Далее наполняем второе полностью до объема 15 л. Затем из второго отливаем в первое 5 л, чтобы заполнить 1 ведро. Значит в первом 7 л, во втором – 10. Выливаем воду из первого ведра и наливаем водой из второго. В первом – 7 л, во втором 3 л.

Эту воду снова выливаем, и 3 л из второго переливаем в первое ведро. Таким образом, 1 ведро 3 л, второе 0 л. Наполняем второе ведро полностью до 15 л и доливаем первое до 7 л. Таким образом, в первом – 7 л, во втором 11 л. И наконец, выливая всю воду из первого ведра, заливаем водой из второго ведра, в котором останется ровно 4 л.

Данная схема может быть представлена в виде: (0,15), (7,8), (0,1), (1,0), (1,15), (7,9), (0,9), (7,2), (0,2), (2,0), (2,15), (7,10), (0,10), (7,3), (0,3), (3,0), (3,15), (7,11), (0,11), (7,4).

Задание 2.

ОДЗ $x \neq 1$. Так как в области ОДЗ знаменатель отрицателен, то неравенство сводится к неравенству:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq -\sqrt{5}x.$$

При $x \geq 0$ это неравенство верно, при $x < 0$ получим:

$$x^2 - 2x + 2 \geq 5x^2.$$

Решение этого неравенства есть промежуток $-1 \leq x \leq 0$.

Ответ: $-1 \leq x < 1, x > 1$.

Задание 3.

ОДЗ $x \neq \frac{\pi K}{3}$. Имеем:

$$cos^2x = sin^2 2x + \frac{\cos(2x + x)}{sin3x};$$

$$cos^2x = 4sin^2x\, cos^2x + \frac{cos2xcosx - sin2xsinx}{sin3x};$$

$$cos^2x(1 - 4sin^2x) = \frac{cosx(cos2x - 2sin^2x)}{sin3x};$$

$$cos^2x(1 - 4sin^2x) = \frac{cosx}{sin3x}(1 - 4sin^2x);$$

Значит $cosx = 0$ или $1 - 4sin^2x = 0$.

Отсюда находим $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$.

Далее имеем:

$$cosxsin3x = 1.$$

Это равенство возможно в двух случаях:

$$\begin{cases} cosx = 1 \\ sin3x = 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} cosx = -1 \\ sin3x = -1 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что обе системы решений не имеют.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm\frac{\pi}{6} + \pi k; k, n \in \mathrm{Z}\right\}$.

Задание 4.

Имеем:

$$x^2 - (y+2)^2 = 5, \qquad (x - y - 2) \cdot (x + y + 2) = 5$$

Так как x, y – целые числа, то равенство возможно в 4 случаях:

1) $\begin{cases} x - y - 2 = 5 \\ x + y + 2 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y - 2 = 1 \\ x + y + 2 = 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y - 2 = -5 \\ x + y + 2 = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y - 2 = -1 \\ x + y + 2 = -5 \end{cases}$

Решая эти системы, найдем ответ: $\{(\pm 3; 0), (\pm 3; -4)\}$.

Задание 5.

Если проценты начисляются раз в год, то по формуле сложных процентов за 10 лет вкладчик получит сумму равную $(1 + 0{,}05)^{10} \cdot 1000$. Точно так же, если проценты начисляются раз в месяц, то через 10 лет (т.е. 120 месяцев) вкладчик получит сумму: $1000 \cdot (1 + \frac{5}{12 \cdot 100})^{120}$. Покажем, что это число больше первого. Для этого достаточно показать, что:

$$1 + \frac{5}{100} < (1 + \frac{5}{12 \cdot 100})^{12}.$$

По формуле бинома Ньютона второе число справа равно:

$1 + \frac{5}{12 \cdot 100} \cdot 12 + \cdots = 1 + \frac{5}{100} + \cdots$, что очевидно больше первого числа.

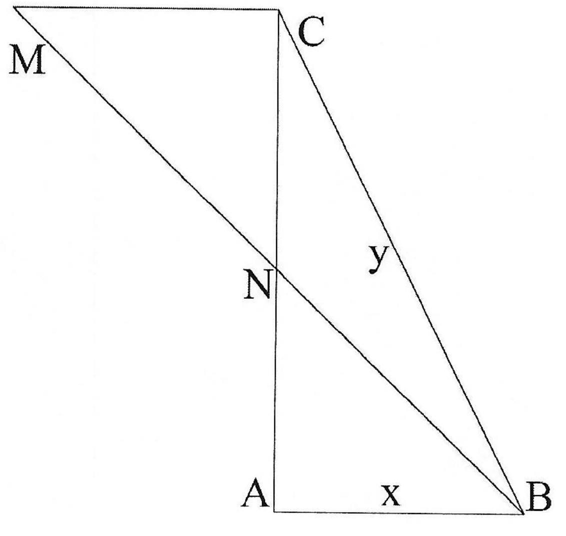
Ответ: во втором случае больше.

Задание 6.

Пусть ABC – прямоугольный треугольник. Обозначим $AB = x$, $CB = y$ – гипотенуза, N – середина катета $AC = 6$. Продолжим медиану BN до пересечения в точке M с прямой параллельной AB. Тогда четырехугольник $ABCM$ – параллелограмм. По теореме о том, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов диагоналей, получаем:

$$2x^2 + 2y^2 = 4 \cdot 22 + 36.$$

Так как $y^2 = 36 + x^2$, то $x^2 + 36 + x^2 = 44 + 18$, отсюда $x^2 = 13$, значит $y^2 = 36 + 13 = 49$, $y = 7$.



Ответ: 7.

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
________ В.Н. Деснянский
«15» февраля 2022 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Краткие решения к задачам очного тура
9-10 классы

Вариант 2

Задание 1.

Заполним второе ведро емкостью 7 литров полностью водой, а затем часть воды перельем в первое ведро. Следовательно, в первом ведре будет 5 л, во втором – 2 л. Затем выльем воду из первого ведра (полностью) и перельем воду из второго ведра (2 л) в первое ведро. Далее заполним второе ведро полностью, и часть этой воды выльем в первое ведро так, чтобы в нем было 5 л. Таким образом, в первом ведре – 5 л, а во втором останется 4 л. Затем выливаем воду полностью из первого ведра и заполняем водой из второго ведра. Следовательно, в первом ведре 4 л, во втором нет воды. Далее заполняем полностью водой второе ведро. Значит в первом 4 л, во втором – 7 л. Дополняем водой из второго ведра первое ведро до полного края. Следовательно, в первом ведре 5 л, во втором 6 л. И наконец, выливаем воду из первого ведра полностью и заполняем ведро до полного объема в 5 л водой из второго ведра. Следовательно, во втором ведре останется в точности 1 л.

Задание 2.

$\frac{3x+3}{3-\sqrt{(x-1)^2+9}} \leq 1 \rightarrow$ ОДЗ $x \neq 1$ и $3-\sqrt{(x-1)^2+9} \leq 0$. Поэтому имеем:

$$\frac{3x+3-3+\sqrt{(x-1)^2+9}}{3-\sqrt{(x-1)^2+9}} \le 0.$$

Так как знаменатель не положителен, то получим:

$$\sqrt{(x-1)^2+9}+3x \ge 0 \leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+9} \ge -3x.$$

Если $x \ge 0$, то неравенство верно.

Если же $x < 0$, то $x^2-2x+10 \ge 9x^2, 4x^2+x-5 \le 0, -\frac{5}{4} \le x \le 1.$

А тогда ответ: $-\frac{5}{4} \le x, x \ne 1.$

Задание 3.

ОДЗ $sin3x \ne 0, x \ne \frac{\pi k}{3}.$

$$sin^2 2x = cos^2 x + \frac{cos\,3x}{sin3x}$$

$$4sin^2 x cos^2 x - cos^2 x = \frac{cos(2x+x)}{sin3x}$$

$$cos^2 x(4sin^2 x - 1) = \frac{cos\,2xcosx - sin2xsinx}{sin3x} = \frac{cos^2 x(cos2x - 2sin^2 x)}{sin3x} =$$

$$= \frac{cos\,x(1-4sin^2 x)}{sin3x}.$$

Поэтому $\left[\begin{array}{c} cosx = 0 \\ 1-4sin^2 x = 0 \end{array}\right.$ или $sin3xcosx = -1.$

Значит, решение будет: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k.$

Далее имеем:

$$\begin{cases} sin3x = -1 \\ cosx = 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} sin3x = 1 \\ cosx = -1 \end{cases}$$

Эти системы не имеют решений.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k, n \in Z\right\}.$

Задание 4.

$$4x^2 = y^2 + 2y + 1 + 3;$$

$$(2x)^2 - (y+1)^2 = 3;$$

$$(2x-y-1)\cdot(2x+y+1) = 3.$$

Так как x, y – целые числа, то получим:

1) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 1 \\ 2x + y + 1 = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y - 1 = 3 \\ 2x + y + 1 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y - 1 = -3 \\ 2x + y + 1 = -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - y - 1 = -1 \\ 2x + y + 1 = -3 \end{cases}$

Из первой системы: $x = 1, y = 0$

Из второй системы: $x = 1, y = -2$

Из третьей системы: $x = -1, y = 0$

Из четвертой системы: $x = -1, y = -2$

Ответ: $\{(1,0), (1,-2), (-1,0), (-1,-2)\}$.

Задание 5.

Если проценты начисляются раз в год, то по формуле сложных процентов за 5 лет вкладчик получит сумму равную $(1 + 0{,}03)^5 \cdot 1000$. Точно так же, если проценты начисляются раз в месяц, то через 5 лет (т.е. 60 месяцев) вкладчик получит сумму: $1000 \cdot (1 + \frac{3}{12\cdot100})^{60}$. Покажем, что это число больше первого. Для этого достаточно показать, что:

$$1 + \frac{3}{100} < (1 + \frac{3}{12\cdot100})^{12}.$$

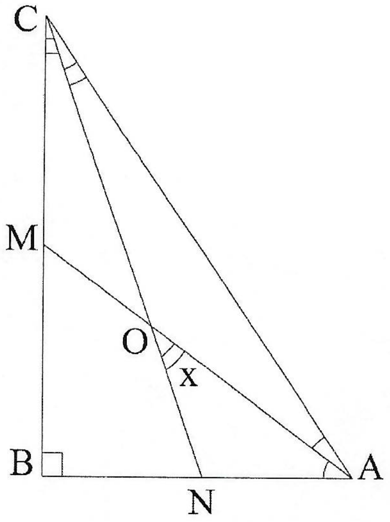
По формуле бинома Ньютона второе число справа равно:

$1 + \frac{3}{12\cdot100} \cdot 12 + \cdots = 1 + \frac{3}{100} + \cdots$, что очевидно больше $1 + \frac{3}{100}$.

Ответ: во втором случае больше.

Задание 6.

Пусть ABC – прямоугольный треугольник с биссектрисами острых углов AM и CN. Обозначим $\angle C = \alpha, \angle A = \beta$. Тогда $\alpha + \beta = 90°$.



Пусть O – точка пересечения биссектрис. Искомый угол, который обозначим x, это острый угол NOA. Из треугольника COA имеем: $\frac{\alpha}{2} + \pi - x + \frac{\beta}{2} = \pi$.

Отсюда $x = \frac{\alpha+\beta}{2} = 45°$.

Ответ: $45°$.